Contrôle Terminal de Physique

DURÉE 2 HEURE - SANS DOCUMENTS

Soit $\mathcal{R}$ le référentiel supposé fixe, et $R(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le repère orthonormé direct qui lui est associé où $(0, \overrightarrow{e_z})$ est l'axe vertical ascendant. Soit $\vec{g}$ l'accélération de pesanteur, de norme $g = 9.81 \mathrm{m.s}^{-2}$.

On considère un mobile assimilé à un point matériel M de masse m, qui se déplace sur un rail situé dans le plan vertical $(0, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Le parcours du mobile le long du rail se décompose en deux. De A vers B, le rail est assimilé à une courbe de forte pente afin de communiquer au mobilr une vitesse qui lui permettra de parcourir l'intérieur du cercle de centre O_1, de rayon a. La courbe AB et le cercle se raccordent en B continuement (voir figure 1).

Le mobile M est libéré sans vitesse initiale en A, à la hauteur h au-dessus du point B (point le plus bas du cercle).

Dans tout le problème, on néglige les frottements entre le mobile et le rail, de telle sorte que la réaction $\vec{R}$ exercée par le rail sur le point matériel M soit normale au rail en tout point.

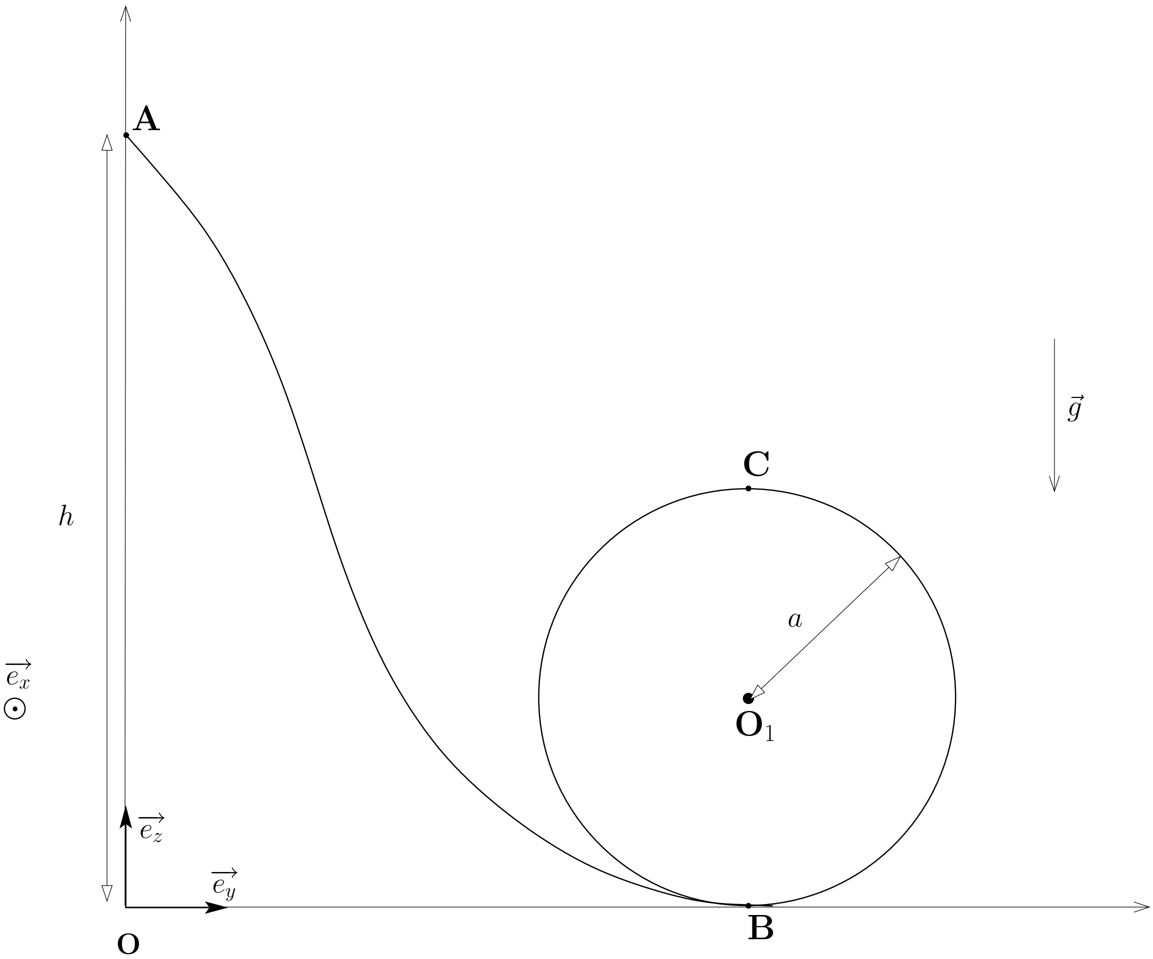

FIG. 1 – Schéma du dispositif.

Les parties I, II-A et II-B peuvent être traitées séparément.

I - Etude énergétique du mouvement de M entre les points A et B

1) - Montrer que la réaction $\vec{R}$ ne travaille pas.

2) - Montrer que l'énergie potentielle E_p dont dérive le poids $\vec{P}$ du point matériel M est de la forme $E_p = \alpha z + \beta$ où α et β sont des constantes. Préciser l'expression de α en fonction des données du problème.

3) - (a) L'énergie mécanique se conserve-t-elle ? Justifier votre réponse.
3) - (b) Exprimer l'énergie mécanique en fonction de m, v, g et z où v désigne le module de la vitesse de M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.
3) - (c) A l'aide de la conservation de l'énergie mécanique exprimer le module de la vitesse du mobile au point B, notée V_B, en fonction de g et h.
3) - (d) En déduire le vecteur vitesse quand M passe en B : $\vec{V_B}$.

II - Etude du mouvement de M sur la partie circulaire du rail

A partir du point B, la trajectoire du mobile est un cercle de centre O_1 et de rayon a. On considère le repère, fixe dans $\mathcal{R}$, $R_1(0_1, \overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_{y1}})$ indiqué sur la figure 2. La position de M sur

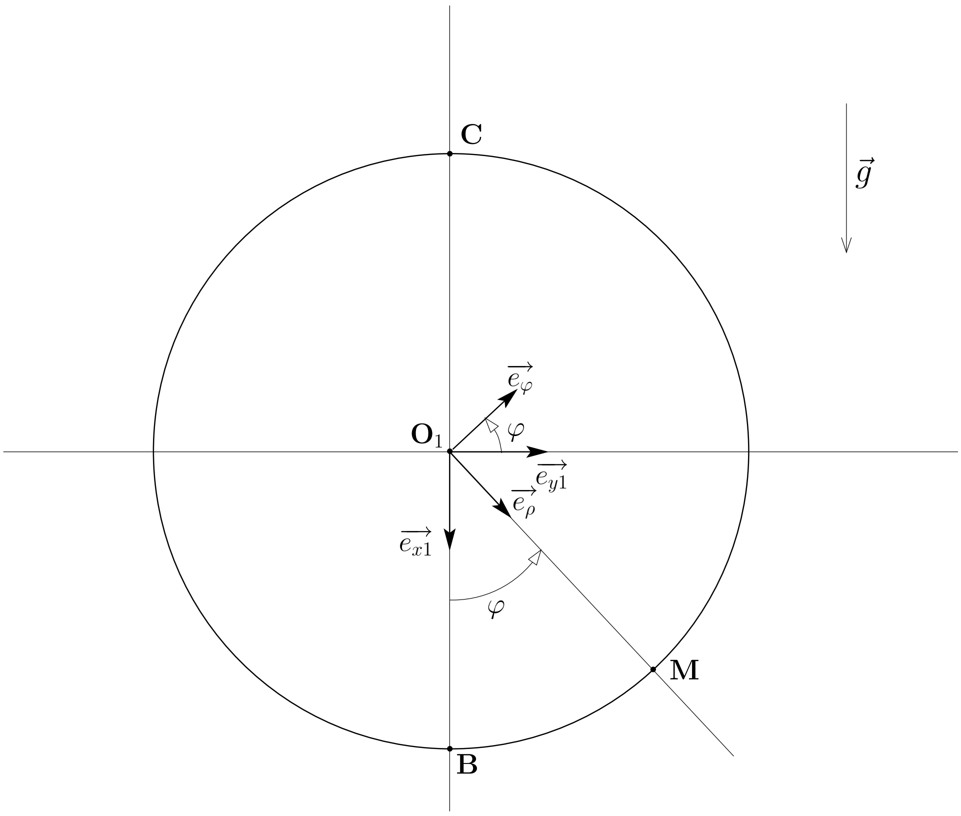

FIG. 2 – Etude du looping.

le cercle est repérée par les coordonnées polaires $(\rho(t), \varphi(t))$. On définit également la base

polaire $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$ telle que $\overrightarrow{O_1M} = a\overrightarrow{e_\rho}$, $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}) = +\pi/2$, et l'angle $\varphi(t) = (\overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_\rho})$.
N.B. : On peut remarquer que $\overrightarrow{e_{y1}} = \overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_{x1}} = -\overrightarrow{e_z}$.

II-(A) - Etude sans frottement visqueux

On suppose que le mouvement du mobile à l'intérieur du cercle s'effectue sans frottement sec. Le mobile, toujours en contact avec le rail, n'est alors soumis qu'à la réaction du rail $\vec{R} = -R\overrightarrow{e_\rho}$ $(R > 0)$ et à son poids $\vec{P} = mg\overrightarrow{e_{x1}}$.

4) - Exprimer dans la base polaire $\mathcal{B}$ la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en fonction de a et $\dot{\varphi}$.

5) - (a) Exprimer $\vec{P}$ dans la base $\mathcal{B}$.
5) - (b) Donner l'expression de la puissance du poids $\vec{P}$ de M dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.
5) - (c) Montrer que l'énergie potentielle dont dérive le poids s'exprime :
$E_p = C_1 \cos\varphi + C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes et où vous préciserez l'expression de C_1 en fonction de m, g et a.

6) - Exprimer le travail élémentaire de la réaction $\vec{R}$ lors du le déplacement de M à l'intérieur du cercle.

7) - (a) L'énergie mécanique du point M se conserve-t-elle ?
7) - (b) Exprimer l'énergie mécanique en fonction de m, g, a, C_2, φ et $\dot{\varphi}$.
7) - (c) Ecrire le théorème de l'énergie mécanique pour M. En déduire une équation du mouvement reliant g, a, φ et $\ddot{\varphi}$ sachant que $\dot{\varphi}$ est non identiquement nul.
7) - (d) Supposons que φ reste suffisamment petit tel que : $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Montrer alors que le mouvement de M vérifie l'équation :$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$ où vous préciserez ω.
En définissant un nouvel instant initial lorsque M est en B, i.e. $\varphi(t=0) = 0$ avec $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$, montrer que $\varphi(t)$ est de la forme : $\varphi(t) = C_3 \sin(\omega_0 t)$ où vous indiquerez l'expression de C_3 en fonction de $\dot{\varphi}_0$ et ω.

II-(B) - Etude avec frottement visqueux

On suppose maintenant que le mobile est soumis en plus à une force supplémentaire dûe au frottement visqueux de l'air, de la forme $\vec{F_v} = -\mu_v \vec{v}(M/\mathcal{R})$ où μ_v est une constante positive.

8) - Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de a, $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$.

9) - (a) Ecrire sous forme vectorielle la loi fondamentale de la dynamique pour le point M dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.
9) - (b) Projeter cette équation dans la base $\mathcal{B}$. Montrer qu'on obtient deux équations scalaires de la forme :
$\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \cos\varphi = \dfrac{1}{ma} R$ et
$\ddot{\varphi} + \dfrac{2}{\tau}\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$
où vous préciserez la dimension de τ et son expression en fonction de μ_v et ω.

10) - Pour φ suffisamment petit tel que $\sin(\varphi) \approx \varphi$, φ est alors solution de l'équation différentielle : $\ddot{\varphi} + \frac{2}{\tau}\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$.

10) - (a) Expliquer pourquoi le mobile peut osciller autour du point B pour $\tau > \frac{1}{\omega}$.
En supposant qu'à $t = 0$ $\varphi(t = 0) = pi/2$ et $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$ donner l'expression de $\varphi(t)$.

10) - (b) Afin de faciliter les calculs, on prend comme nouvel instant initial le moment où M est tel que : $\varphi(t = 0) = \pi/2$ avec $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$. Donner alors l'expression de $\varphi(t)$ dans le cas où le mobile peut osciller.

10) - (c) Représenter sur un dessin φ en fonction du temps t. Indiquer la pseudo-période T du mouvement en fonction de ω et τ.

10) - (d) En déduire la position du mobile sur le rail circulaire lorsque $t \longrightarrow \infty$.